

广义收敛的分形图像压缩编码

洪喜勇, 陈贺新

(吉林工业大学信息科学与工程学院, 吉林长春 130025)

摘要: 本文讨论了分形图像压缩的收敛性问题, 给出了严格收敛和广义收敛的概念, 提出了广义收敛的分形图像压缩编码方法(GC-FICC). 实验证明, 应用本文方法, 可以在保证同样压缩比前提下, 提高重建图像质量.

关键词: 广义收敛; 分形; 图像压缩; 编码

中图分类号: TN919.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 06-0842-04

Fractal Image Compression Coding Based on Generalized Convergence

HONG Xi-yong, CHEN He-xin

(College of Information Science and Engineering Jilin University of Technology, Changchun, Jilin 130032, China)

Abstract: The convergence of fractal image compression coding is discussed in this paper. The definitions of both generalized convergence and normal convergence are given. With the discussion, a new coding algorithm—fractal image compression coding based on generalized convergence (GC-FICC) is proposed here. It is shown that, under the same compression ratio, the quality of the reconstructed image with GC-FICC is improved.

Key words: generalized convergence; fractal; image compression; coding

1 引言

八十年代中期, Barnsley 等人提出分形图像压缩的概念^[1], 对几幅彩色图像及一个女孩图像获得 10000:1 的高压缩比, 并获得 US 专利^[3], 分形图像压缩以其潜在的高压缩比和良好的重建图像质量受到广泛的关注^[4]. 然而, 他们的方法是有经验的图像处理专家基于人机交互进行的, 寻找图像局部与整体的相似性极其困难. 80 年代末, Jacquin 在他的博士论文中提出利用图像局部间相似性, 实现了全自动分形图像压缩编码^[5,6], 使分形图像压缩向实用化迈出了坚实的一步. 然而, Jacquin 的自动分形压缩编码是在设定阈值条件下进行的, 这里面还存在人为主观意愿, 换句话说, 在这种意义下的分形编码属于人为严格匹配造成的, 在此我们称之为严格收敛, 在实际中, 由于图像的随机性, 人为设定阈值方法存在许多问题, 因此人们正在研究基于图像自身特性的自适应分形编码方法^[7], 这就是在广义匹配或者广义收敛的新定义下, 根据图像自身的统计特性来实现自适应分形编码. 本文在定义广义收敛性的概念后, 提出一种广义收敛的分形图像压缩编码方法(简称 GC-FICC). 文中首先讨论了分形图像压缩理论, 然后我们给出了广义收敛性的定义及 GC-FICC 算法, 最后是实验结果和结论.

2 分形图像压缩基础理论

分形图像压缩的数学基础是双曲迭代函数系统 (IFS)、拼贴定理. 分形理论指出, 分形是复杂的不规则的集合, 也是具

有精细结构的集合图像, 许多分形可以用简捷的构造过程得出. 分形图像压缩就是寻找简单的 IFS 代码, 解码用收到的 IFS 代码在任意初始图像上进行迭代, 重建吸引子.

定义 1 迭代函数系统是完备空间 (X, d) 上的一组压缩映射 $f_n: X \rightarrow X, n=1, 2, \dots, N$, 每个压缩映射 f_n 的压缩因子为 S_n , 且 $0 < S_n < 1$. 记为 $\{f_n; n=1, 2, \dots, N\}$, 且其收缩因子为 $S = \max(S_n)$.

分形图像压缩就是寻找这组压缩映射.

定理 1 设 $\{f_n; n=1, 2, \dots, N\}$ 是一双曲的迭代函数系统, 对于所有的 $B \subset H$ 完备空间, 则定义:

$$\begin{aligned} \text{变换 } W: H \rightarrow H: W(B) &= \bigcup_{n=1}^{n=N} f_n(B) \\ &= f_1(B) \cup f_2(B) \dots \cup f_N(B) \end{aligned}$$

是完备空间 H 上的一个压缩映射, 压缩因子是 S , 对所有的 $B, C \subset H$, 满足:

$$h(f_n(B), f_n(C)) \leq S * h(B, C), \text{ 且 } W \text{ 不动点满足 } A \subset H:$$

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{n=N} f_n(A), \text{ 并且对任意一个 } B \subset H \text{ 成立}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B).$$

上述定理中 $h(\cdot, \cdot)$ 是 Hausdorff 测度, A 称为迭代函数系统 $\{f_n; n=1, 2, \dots, N\}$ 的吸引子.

定理 2 设 (X, d) 是一个完备的度量空间, 给定 L 完备度量空间与 \mathbb{R}^+ , 具有压缩因子 $S: 0 < S < 1$ 的迭代函数系统 $\{f_n; n=1, 2, \dots, N\}$, 使得:

$$h(L, \prod_{n=1}^{n=N} h_n(L)) \leq \Rightarrow h(L, A) \leq \rho / (1 - S).$$

$$\text{即 } h(L, A) \leq (1 - S)^{-1} h(L, \prod_{n=1}^{n=N} h_n(L)).$$

定理 2 说明了存在一个迭代函数系统,其吸引子 A 近于给定的集合.也就是说,基于迭代函数的分形图像压缩,实质就是在给定集合 L 所在的空间(待压缩的图像)寻找一组压缩映射,使得给定集合在这组映射 $h_n (n = 1, \dots, N)$ 下,像的并或拼贴近于给定集合.

Jacquin 方法是分割迭代函数系统,具体对图像进行压缩简单概括为图像 G 分割为不重迭的 R 块——排列块($B * B$)和可重迭的 D 块——区域块($2B * 2B$),对每一个 R 块的编码是搜索 D 块库,使 D 块经收缩、同构、对比度及灰度变换——压缩仿射变换后在某一测度下与 R 块匹配.记录与 R 块匹配的 D 块的位置、同构变换的种类、对比度因子及灰度因子——构成分割 IFS 码书,解码通过迭代重建原图.

3 分形压缩广义收敛性及广义收敛的分形图像编码

3.1 分形压缩广义收敛性

依据前面介绍的分形压缩的原理,对一幅图像进行分形压缩 $R-D$ 块匹配过程可描述为:

$$rd = S_j * (I * (C * (D_j))) + g_j(1) \quad (1)$$

其中: r —代表变换; C —收缩变换; I —同构变换; S_j —对比度尺度; g_j —灰度因子

设 $dr = I * (C * (D_j))$, $r(K, L)$ 、 $dr(K, L)$ 分别代表 R 块和 D 块经收缩和同构变换后块的像素值,某一测度下 R 块和 rd 两者距离最小(或小于某一阈值)时称相应的 D 块与 R 块匹配.通常采用最小二乘测度,这时两者距离:

$$d^2 = \{ r(K, L) - [S_j * dr(K, L) + g_j] \}^2 \quad (2)$$

d^2 对 S_j 、 g_j 求偏导,令其为零,则有: $S_j =$

$$\frac{B^{2k} \sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} r(k, L) dr(k, L) - \sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} r(K, L) \sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} dr(K, L)}{(B^{2k} \sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} (dr(K, L))^2 - (\sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} (dr(K, L))^2)} \quad (3)$$

$$g_j = \left(\sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} r(K, L) - S_j * \sum_{k=1L=1}^{k=BL=B} (dr(K, L)) \right) / (B * B) \quad (4)$$

分形图像压缩的实质是寻找一组压缩映射的分割 IFS 系数. Jacquin 法^[2]分形图像压缩,通常限定 $S_j \in (0, 1)$, 以保证解码迭代收敛.实际上,用最小二乘法求 S_j , $S_j > 1$ 的数量较多(参看第 4 节图 3、图 4).由式(1)描述的过程,对所有的 $n = 1, \dots, N$ 构成的迭代函数系统,对比度因子 $S_j \in (0, 1)$, 虽然可保证解码收敛,但它却舍弃了最小二乘意义下的匹配块,因此会影响图像重建质量.另外,从统计特性分析式(1),其均值和方差分别为:

$$E[rd] = E[S_j * (dr) + g_j] = S_j * E[dr] + g_j \quad (5)$$

$$^2[rd] = ^2[S_j * (dr) + g_j] = S_j^2 * ^2[dr] \quad (6)$$

从式(5)(6)可以看出,为了和 R 块匹配, D 块经过压缩仿射变换,其均值、方差和 S_j 分别是线性、平方的关系,当 S_j 较大时,这说明相应未变换前的 D 块其方差和 R 块差别较大,若强行匹配同样影响重建图像质量,这也是分形图像压缩

编码必须克服的问题.

定义 2 分形图像压缩中,对比度因子 $S_j \in [0, 1]$ 时, D 块在某一测度下与 R_i 匹配称为严格匹配.

传统的分形图像压缩就属于这种情况,它通过严格限制对比度因子,保证重建时迭代收敛.实验中我们发现,并不是所有 $S_j \in [0, 1]$ 的对比度因子,都使重建图像质量下降.为此本文引入广义匹配的概念.

定义 3 分形图像压缩中,能够使重建图像迭代收敛的某一测度下 D 块与 R_i 匹配称为广义匹配.

这时拓宽了对比度因子 S_j 的取值范围,并不是完全限定在 $[0, 1]$ 范围内,就图像重建而言,应有收敛性问题——广义收敛性.

定义 4 分形图像压缩的广义收敛性是指基于 $|S| < 1$, $S = S_j * S_I * S_C$, 所造成的 S_j 、 S_I 、 S_C 为大于零或小于零的任意数对分形图像压缩重建吸引子的影响.

定义 5 广义匹配时 S_j 、 S_I 、 S_C 能够保证迭代收敛于吸引子的取值范围称为收敛域,反之称伪收敛域.

伪收敛域内,会影响重建图像质量,有时其质量会严重下降.为了提高重建质量,关键是确定收敛域,保证得到的 D 块为严格匹配块或广义匹配块.就式(1)描述的分形压缩有以下定理:

定理 3 分形图像压缩,当压缩因子 $|S| = |S_j * S_I * S_C| < 1$, 即 $-1 < S_j * S_I * S_C < 1$ 时, R_i 和相应的 D 块是广义匹配的,其迭代函数系统的吸引子近于原图像.(证明见附录一).

依据定义 4 和定理 3, 给出以下引理.

引理 分形图像压缩编码,同构变换 $S_I = 1$, 则当满足 $S_j < 1/S_C$ 或 $S_j > -1/S_C$ 时的 S_j 、 S_C 值保证分形图像压缩编码广义收敛.

因为分形图像压缩编码时 D 块首先经过收缩变换,则收缩因子 $S_C < 1$, 根据采用的不同收缩, S_C 取不同的值,因此上述引理的直接推论就是:

推论 分形图像压缩编码对比度尺度 S_j 的取值可以不必限定在 $[0, 1]$ 内,当满足引理的条件,其重建吸引子会更加近于原图像.

3.2 广义收敛分形图像编码

(1) 原图像分割成尺寸为 $B * B$ 的 R 块,构造 D 库,库中每个 D 块尺寸为 $2B * 2B$;

(2) $R-D$ 块的匹配搜索.包括 D 块经收缩变换、同构变换、对比度变换、灰度变换.

(3) 计算 S_j 、 S_I 、 S_C , 判断其广义收敛性,确定满足广义收敛条件的匹配块.

(4) 记录 R 块尺寸及相应 D 块的位置、八种同构变换的序号、对比度尺度、灰度因子,构成 IFS 系数;

(5) IFS 系数的量化,组成原图像的分形编号码书.

4 实验结果及分析比较

如图 5(a) 所示,原图像为 $256 * 256$ 个像素,每像素 8 比特的灰度图像 Lenna. 解码时依据收到的 IFS 代码在任意初始图像上迭代.

实验一 原图分割为均匀的尺寸为 8×8 的 R 块, D 库中 D 块尺寸为 16×16 , 步长为 $\Delta = 8$. 实验结果如下表:

表 1

	压缩比	PSNR	备注
传统分形编码	20.48	26.86	引自文献[8]
去均值分形编码	20.48	27.07	
GC-FICC 方法	20.48	27.34	均匀分块

实验一中因为均匀分块, 且 D 库构造依据步长 $\Delta = 8$, 所以 D 库中块较少, 恢复图像 PSNR 较小. 但从表中可看到, 压缩比相同的情况下, PSNR 有明显提高. 另外, 为了和四叉树分割的 Jacquin 法分形图像压缩编码进行比较, 应用本方法, 做了第二个实验, 我们称为基于四叉树分割的广义收敛的分形图像压缩编码方法, 实验数据如下表:

表 2

	压缩比	PSNR	备注
传统分形编码	11.68	29.88	四叉树分割
GC-FICC 方法	11.68	30.42	
Jacquin 方法	11.11	28.20	引文献[2]

注: 这里压缩比只是简单的估算, 没有象文献[2]中 Jacquin 那么精确计算, 因为只在于比较压缩比相近情况下, PSNR 的提高情况, 实际压缩比将比表中要高. 各种方法的解码图像如图 5.

从表中看出在均匀分块、四叉树分割的分形图像编码中, 在压缩比相近时, GC-FICC 方法 PSNR 都有所提高.

实验三 本文做了采用均值收缩时, 对比度因子在不同范围时重建图像 PSNR 对比, 如图 1 和图 2.

图中: 坐标横轴表示重建时迭代次数, 纵轴为 PSNR-峰值信噪比. 曲线 1、2、3、4 分别是在对比度尺度没有限制、伪收敛域内、严格匹配和广义收敛时绘出的.

实验数据分析: 从图 1 可看出曲线 1 为 S_j 没有限制, 这时 PSNR 最好仅为 9.51, 曲线 3 是文献[8]基于 Jacquin 的传统分形压缩编码-严格匹配, 它的 PSNR 是 26.86, 本文方法曲线 4 的 PSNR 为 27.34, 甚至比文献[8]方法的 PSNR = 27.07 还要高, 而收敛速度相当. 伪收敛时 PSNR 严重下降, 如曲线 2 所示. 从图 2 四叉树分割情况看也有类似现象, 只是考虑图像的统计特性, 图像分割时增加了较小的 R 块, 同时 D 块库选的

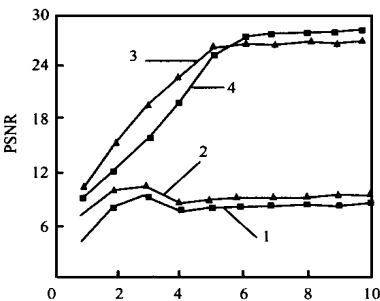


图 1 均匀分块

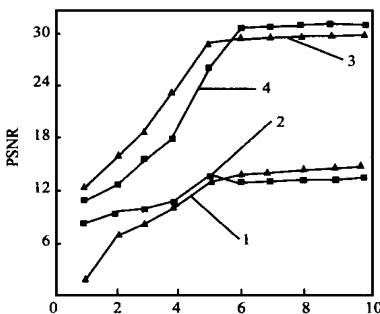


图 2 四叉树分割

也较大, 因此四个曲线 PSNR 值都有增加, 但没有限制 (曲线 1) 和伪匹配时 (曲线 2), 其 PSNR 值比广义收敛时低得多, 最高才 15.2.

图 3、4 分别是实验一、二中, 利用式 (3)、(4) 计算 S_j (S_j 没有限制), 对比度尺度分布直方图.

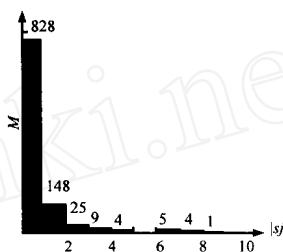


图 3 实验一中对对比度因子分布

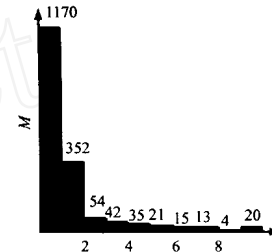


图 4 实验二中对对比度因子分布

其中: M 为 $|S_j|$ 的数量. 从图中可看出两个实验中 $|S_j|$ 分布情况, $|S_j| > 1$ 的数量分别为 196 和 556 个, 它将影响重建图像质量. 即图 1、图 2 的曲线 1 所示情况, 可看出重建图像 PSNR 很低, 这正是因为有少量块的 S_j 不满足 $S_j < 1/S_c$ 或 $S_j > 1/S_c$ 的影响所造成的.



图 5 (a) Lenna 原图 256×256 (b) 均匀分块 GC-FICC 方法解 码图像, PSNR 为 27.34. (c) 四叉树分割时 GC-FICC 方法解 码图像, PSNR 为 30.42.

图 5

5 结论

本文讨论了分形图像压缩的广义收敛性问题, 给出了 $R \rightarrow D$ 块的严格匹配和广义匹配的概念, 从分析对比度尺度、收缩因子对重建图像影响入手, 给出了判断广义收敛性的定理, 并给出了证明. 从两个实验的结果可知, 应用本文方法, 可以在均匀分块、四叉树分割中, 压缩比、计算量、编、解码时间相当的情况下, 改善重建图像质量. GC-FICC 方法也可以推广到其它涉及分形图像压缩的编码中, 进一步提高重建图像的 PSNR, 从而丰富和完善了分形图像压缩编码理论和方法.

附录一 定理 3 证明

证明:

一、收缩性. 完备度量空间 (X, d) (即数字图像), 分形编码时, 原图 G 分 $n = N$ 块, 就每个 R 块 R_i 寻找与之匹配的 D 块的匹配过程构成一组映射 $f_i: X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N$, 其映射因子为 S_i , 并且它是三部分组成, 即 S_j, S_l 和 S_c . 对 $\forall x, y \in X$, 则有:

$$d(f_i(x), f_i(y)) = |S_j * S_l * S_c| d(x, y) \quad (A)$$

令 $|S| = \max(|S_j * S_l * S_c|)$, 所以有:

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq |S| d(x, y) \quad (B)$$

因定理条件是 $|S| = |S_j * S_l * S_c| < 1$ (显然 $|S_j * S_l * S_c|$

0),这说明分形编码的映射 $\{f_n: X \rightarrow X \mid n=1, \dots, N\}$ 是压缩映射,并构成一局部迭代函数系统 $\{X; f_i, i=1, 2, \dots, N\}$ (IFS).

二、收敛性.

设 T 为数字图像的非空集, $W(T) = \bigcap_{i=1}^N f_i(T)$, A 为 W 的不变集,即吸引子,设迭代 $A_i = W^{0i}(T) = W(W(\dots W(T)))$. $A_0 = T, A_i = W(A_{i-1})$, 且 $W(A) = A$, 那么, T 和吸引子 A 间的距离为:

$$d(T, A) = d(A_0, A) \leq d(A_0, W(A_0)) + d(W(A_0), A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(W^{0(i-1)}(A_0), W^{0i}(A_0)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_0, W(A_0)) (1 + |s| + |s|^2 + \dots + |s|^n)$$

当 $|s| \leq 1$ 时则 T 和 A 的距离:

$$d(T, A) \leq \frac{1}{1 - |s|} d(A_0, W(A_0))$$

$d(A_0, W(A_0))$ 是大于零的任意正数.

任意非空集 T 可以用自相似集来逼近,分形迭代函数系统吸引子 A 收敛于 T . 定理证明完毕.

参考文献:

- [1] M F Barnsley. fractals Everywhere. Boston, Academic [R], 1988.
 [2] Arnaud Jacquin. Fractal image coding theory of iterated contractive image transformation SPIE [C], 1990, 1360 : 227 - 239.
 [3] T Bedford, et al. Fractal coding of monochrome image [J]. Signal processing image communication, 1994, 6 : 405 - 419.

- [4] 中野胜彦 中川 匡弘. ガウシアンピミッドを利用した階層的IFS画像符号化. 电子情报通信学会论文誌 A [J]. 1995, J78-A (7) : 856 - 863.
 [5] A E Jacquin. image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformation [J]. IEEE Trans. Imageprocessing, 1992, 1 (1) : 18 - 30.
 [6] A E Jacquin. Fractal image coding: A Review. Proceedings of The IEEE [J]. OCTOBER 1993, 81 (10) : 1451 - 1465.
 [7] Murray H Loew, et al. An adaptive PIFS model in fractal image compressing [C]. SPIE, April, 1996, 2707 : 284 - 293.
 [8] 张颖, 余英林. 一种基于去除均值的加速收敛的分形压缩算法 [J]. 中国图象图形学报. 1998, 3 (4) : 285 - 289.

作者简介:



洪喜勇 男. 181852 部队工程师, 吉林工业大学通信与信息系统专业在读博士, 研究兴趣为通信、图像编码.

陈贺新 男. 吉林工大信息学院教授, 博士生导师. 研究兴趣包括图像处理、机器人视觉、人工神经网络等.